## **基础课35 数列的综合问题**

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **考点考向** | **课标要求** | **真题印证** | **考频热度** | **核心素养** |
| 等差、等比数列的综合 | 理解 | 2022年全国甲卷（文）  2021年全国乙卷（文） | ★★★ | 逻辑推理  数学运算 |
| 数列与其他知识的交汇 | 理解 | 2023年北京卷  2020年新课标Ⅱ卷（理） | ★★☆ | 逻辑推理  数学运算 |
| 命题分析预测 | 从近几年高考的情况来看，一般以压轴题的形式出现，属于中档题或较难题，命题热点以递推式为载体，常常与不等式、函数、方程交汇，具有知识点多、覆盖面广、综合性强的特点.预计2025年高考命题情况变化不大，但应加强对阅读、理解、迁移和运算的训练 | | | |

### **基础知识·诊断**

#### **夯实基础**

##### **一、数列与函数**

数列与函数的综合问题主要有以下两类：

1.已知函数条件，解决数列问题，此类问题一般是利用函数的性质、图象研究数列问题；

2.已知数列条件，解决函数问题，解决此类问题一般要充分利用数列的范围、公式、求和方法等对式子化简变形.

##### **二、数列中不等式恒成立的问题**

数列中有关项或前项和的恒成立问题，往往转化为数列的最值问题；项或前项和的不等关系可以利用不等式的性质或基本不等式求解.

#### **诊断自测**

##### **题组1 走出误区**

1. 判一判.（对的打“√”，错的打“×”）

（1） 已知等差数列的公差，等比数列的公比为，若,,，则.( × )

（2） 已知数列满足，，成等差数列，，，成等比数列，若，则.( × )

（3） 若数列的前项和，则“”是“数列为等比数列”的充分不必要条件.( × )

（4） 若数列满足，且与的等差中项是5，则.( √ )

2. （易错题）记数列的前项和为，已知，.设，，为数列的前项和，则1994.

【**易错点**】忽视对中的符号的分类讨论致错.

[解析]由得，两式相减得,即,所以，

故数列是首项,公比为2的等比数列，即,

所以.

##### **题组2 走进教材**

3. （人教A版选修②P56·T10改编）已知等差数列的前项和为，且,.若,，为数列的前项和，则.

[解析]设等差数列的公差为,由得,即， ① 由得,即， ②

联立①②解得故数列的通项公式是,，

所以，

则, , ④

由得,故.

4. （人教A版选修②P37·例9改编）设等比数列的前项和为，若，，则( B ).

A. .144 B. .81 C. .45 D. .63

[解析]由等比数列的性质可知，，， 成新的等比数列，设这个新数列的公比为，由，得，所以.故选.

##### **题组3 走向高考**

5. [2021·新高考Ⅱ卷]（多选题）设正整数，其中，，记，则( ACD ).

A. B.

C. D.

[解析]，，正确.

当时，，，，， ，错误.

，，，,正确.

，，正确.

故选.

### **考点聚焦·突破**

#### **考点一 等差、等比数列的综合问题［师生共研］**

典例1 [2024·上海模拟]已知数列的前项和为，数列满足，.

（1）求证：是等差数列.

（2）是否存在常数,，使得对一切正整数，都有成立？若存在，求出，的值；若不存在，说明理由.

[解析]（1）因为数列的前项和为，

所以当时，，

当时，，

所以，满足上式，所以数列的通项公式为，，

所以，，所以是等差数列.

（2）存在.因为，所以，

所以数列是以8为首项，为公比的等比数列，

所以，

所以，要使对一切正整数都有成立，即，即，

所以解得

故存在常数,，当,时，对一切正整数都有成立.



**等差数列、等比数列综合问题的解题策略**

1.分析已知条件和求解目标，为最终解决问题设置中间问题，例如求和需要先求出通项、求通项需要先求出首项和公差（公比）等，确定解题的顺序.

2.注意细节：在等差数列与等比数列综合问题中，若等比数列的公比不能确定，则要看其是否有等于1的可能，在数列的通项问题中第一项和后面的项能否用同一个公式表示等，这些细节对解题的影响也是巨大的.

##### **针对训练**

[2024·滨州模拟]已知等差数列和等比数列满足，，，.

（1） 求数列，的通项公式；

[解析]设等差数列的公差为，因为，所以，所以，所以.

又，即，所以，所以.

（2） 将数列中不在数列中的项按从小到大的顺序排列构成数列，记数列的前项和为，求.

[解析]由（1）得，即是数列中的第项.设数列的前项和为，数列的前项和为，因为，，所以数列的前100项是由数列的前107项去掉数列的前7项后构成的，所以.

#### **考点二 数列与其他知识的交汇问题［多维探究］**

##### **数列与不等式角度1**

典例2 [2022·新高考Ⅰ卷]记为数列的前项和，已知,是公差为的等差数列.

（1）求数列的通项公式.

（2）求证：.

[解析]（1），,,又是公差为的等差数列，,, 当时，，,整理得,即,

，

显然对于也成立，的通项公式为.

（2）,

.



数列与不等式的结合，不仅应熟练掌握数列的通项公式、求和公式，还要灵活运用不等式证明、不等式恒成立问题的处理方法.

##### **数列与函数角度2**

典例3 已知数列是各项都为正整数的等比数列，,且是与的等差中项，数列满足,.

（1）求数列,的通项公式;

（2）若对任意恒成立，求实数的取值范围.

[解析]（1）设等比数列的公比为，则，

是与的等差中项，,

即，解得或（舍去），,,，

又， 数列是以2为首项，2为公比的等比数列，

,.

（2）由，

整理可得，即，对任意恒成立，

令，则,

当时，，当时，,

当或时，取得最大值，,

，解得.故实数的取值范围是.



解题时要注意数列与函数的内在联系，灵活运用函数的思想求解.在求解过程中往往会遇到数列的求和、和的最值问题，利用函数性质或不等式性质求解较为常规.

##### **多维训练**

1. 设递增等差数列满足，且，，成等比数列.

（1）求数列的通项公式；

（2）设,试确定与的大小关系，并给出证明.

[解析]（1）设数列的公差为.

因为，，成等比数列，

所以，即.

又因为，所以.

所以数列的通项公式为，.

（2）.证明如下：

由（1）知，，，易知,

所以，

故，.

2. [2024·浙江模拟]已知在公差不为零的等差数列中，，且,,成等比数列，数列的前项和满足.

（1）求数列和的通项公式；

（2）设，数列的前项和为，若不等式对任意恒成立，求实数的取值范围.

[解析]（1）设等差数列的公差为,，且,,成等比数列，

，即，解得或（舍去），

.

数列的前项和，

当时，，,

当时，，，

即数列是首项为2，公比为2的等比数列，

.

（2）由（1）可得，

,

.

令，则，

在其定义域上单调递增，，

，，.